Materialien wachsen mit

Muster und Strukturen vom Kindergarten bis zur Sekundarstufe I

Gibt es Materialien zum Mathematiklernen, die vom Kindergarten über die Grundschule bis hin zur Sek. I Gewinn bringend eingesetzt werden können? Die Antwort ist ein klares „Ja"! Zwei dieser Materialien werden hier vorgestellt: Holzwürfel und Patternblocks. Den inhaltlichen Rahmen bildet das Denken in Mustern und Strukturen.

REINHOLD HAUG / GERALD WITTMANN

„Mathematik ist *die Wissenschaft von den Mustern.* [...] Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende." (Devlin 1988, S. 3 f., Hervorh. im Original) So wird auch das Denken in Mustern und Strukturen von den Bildungsstandards der KMK (2004) für die Primarstufe als eine der fünf Leitideen eingeordnet.

Muster und Strukturen: eine Begriffsklärung

Was ist ein Muster? Was ist eine Struktur? Es ist nicht möglich, eine allgemeingültige Definition zu geben, da Muster und Strukturen in vielen Bereichen der Mathematik auftreten und vielgestaltig sind. Anhand typischer Beispiele können diese für den Mathematikunterricht wichtigen Begriffe jedoch gut verdeutlicht werden **(Abb. 1** und **Abb. 2)**: Lassen sich Beziehungen zwischen den Zahlen in einer Tabelle erkennen? In welche Teilterme lässt sich ein Term gliedern? Aus welchen Elementen besteht das Bandornament? Wie ist die Würfeltreppe aufgebaut? Diese Fragen zielen auf die *Struktur* der betreffenden mathematischen Objekte. Es geht darum, ein Beziehungsgefüge und seine Eigenschaften zu verstehen, oder anders formuliert, zu erkennen, wie die Teile eines komplexen Ganzen zueinander angeordnet sind.

Lassen sich innerhalb der Strukturen Regelmäßigkeiten erkennen? Kehrt eine spezielle Anordnung von Objekten wieder oder wird ein Bildungsprinzip immer wieder angewendet? Wenn diese Frage zu bejahen ist, dann liegt ein *Muster* vor.

Wie die Beispiele zeigen, ist das Denken in Mustern und Strukturen zentral für die Mathematik – nicht nur in der Geometrie:

- Voraussetzung für ein flexibles Rechnen in der Arithmetik ist das Erkennen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen, also das Erkennen von Strukturen und Mustern (strukturierte Päckchen).
- Auch algebraisches und funktionales Denken basieren auf dem Identifizieren von Veränderungen, z. B. innerhalb einer Zahlenreihe.
- Analogien zwischen verschiedenen Sachkontexten treten besonders deutlich hervor, wenn diese durch dieselbe Gleichung ausgedrückt werden können. Die Gleichung beschreibt diese gemeinsame Struktur algebraisch (z. B.: Zinseszinseffekt, unbegrenztes Wachstum mit Kindeskindern, ...).
- Das Denken in algebraischen Strukturen (Gruppe, Ring, Körper, ...) und strukturerhaltenden Abbildungen (Isomorphismus) in der Hochschulmathematik bedeutet, hinter verschiedenen Mengen von Objekten gleichartige Beziehungen zu erkennen.

Muster und Strukturen lassen also Analogien (und damit auch Unterschiede) zwischen vordergründig verschiedenen Situationen hervortreten.

Muster treten auch im Alltag auf: Ein Konjunkturzyklus (Boom, Abschwung, Rezession, Aufschwung, Boom, ...) oder die Abfolge der Jahreszeiten sind typische Muster. Allerdings wird das Wort „Muster" im Alltag auch anders, mit einer abweichenden Bedeutung, verwendet: So steht Muster (oder gemustert) bei einem Kleidungsstück häufig als Gegensatz zu einfarbig. Ein Kommunikations- und Handlungsmuster („Jedes Mal, wenn meine Schulleiterin ..., dann reagiere ich ..., und es kommt zu ...") beschreibt eine wiederholt auftretende Abfolge von Äußerungen oder Handlungen und gründet auf der inneren Struktur einer Situation.

Speziell in Bezug auf geometrische Muster kann man zwei typische Ausprägungen unterscheiden (Lüken 2012, S. 18 ff.): Bei einem *wiederkehrenden Muster* lässt sich eine *Grundeinheit* ausmachen, die unverändert und regelmäßig immer wieder auftritt. Das Muster kann durch ein wiederholtes Aneinanderfügen dieser Grundeinheit erzeugt werden. Bei einem *wachsenden Muster* hingegen lässt sich ein *Bildungsprinzip* finden, das regelmäßig wiederkehrt: Die einzelnen Teilstrukturen des Musters gehen durch Wachsen (oder Schrumpfen) entsprechend diesem Bildungsprinzip auseinander hervor **(Abb. 2)**.

Strukturen und Muster werden in eine bestimmte Konfiguration *hineingesehen*. Es handelt sich um eine individuelle Deutung der Situation, die abhängig ist von individuellen Vorerfahrungen und der aktuellen Aufmerksamkeitsfokussierung. Demzufolge ist das Erkennen einer Struktur oder eines Musters nicht erzwingbar. So kann es vorkommen, dass Schülerinnen und Schüler eine andere Struktur oder ein anderes Muster erkennen als die Lehrkraft und eine vorgegebene Konfiguration auf unterschiedliche Weise fortsetzen **(Abb. 3)** – Strukturen und Muster sind häufig nicht eindeutig. Für die Lernbegleitung ergibt sich hieraus die Konsequenz, dass ein vorschnelles „Aufdrängen" der eigenen Struktur oder des eigenen Musters selten hilfreich ist.

Schülerinnen und Schüler benötigen Zeit, um Muster zu erkennen oder zu entwickeln. Sie müssen eigenständig experimentieren, Fehlversuche und Umwege bleiben nicht aus. Prozessorientierte Fragen und Impulse können unterstützend wirken, während bei ergebnisorientierten Hilfen Vorsicht geboten ist. Verbalisierungen und visuelle Hervorhebungen eignen sich oft, um Entdeckungsprozesse zu fördern. Wenn es angebracht ist, können Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, verschiedene Fortsetzungen eines Musters zu finden.

Im Folgenden werden zwei Materialien vorgestellt, die Gewinn bringend vom Kindergarten bis in die Sekundarstufe I eingesetzt werden können: Holzwürfel und Patternblocks. Die Darstellung ist idealtypisch für die genannten Bildungsinstitutionen – selbstverständlich sind die jeweiligen Arbeitsweisen nicht trennscharf und es gibt fließende Übergänge.

Holzwürfel

Aufgrund ihrer Gleichfarbigkeit und Gleichförmigkeit bietet eine größere Anzahl von Holzwürfeln (Kantenlänge 2 cm) vielfältige Möglichkeiten zum Bauen. Gerade weil das Äußere so schlicht ist, laden sie zu individuellen Strukturierungen ein. In besonderer Weise kommt dies bei Lernumgebungen nach dem Prinzip „gleiches Material in großer Menge" (Lee 2010) zum Tragen: Wenn sehr viel Material „auf einem Haufen" unsortiert zur Verfügung steht, fordert dies zum Strukturieren heraus.

Aber auch für stärker angeleitetes und zielgerichtetes Lernen bietet das Bauen mit Holzwürfeln viele Möglichkeiten. Obwohl dabei über die Jahre hinweg bei vordergründiger Betrachtung dieselben Würfelbauwerke auftreten, ändert sich doch ihre Bedeutung für das jeweilige Mathematiklernen grundlegend (s. **Kasten 1**).

x	1	3	3	4	5	6	7
y	1	4	9	16	25	36	49

+3 +5 +7 +9 +11 +13

$\boxed{2x^2+1}$ $\boxed{(2x+1)^2}$ $\boxed{2(x+1)^2}$ $\boxed{(2x)^2+1}$

Abb. 1: Auch außerhalb der Geometrie finden sich Muster und Strukturen

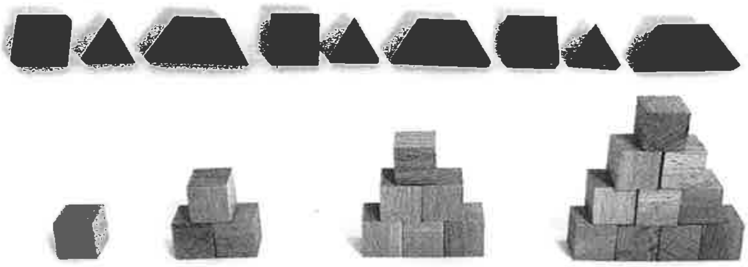


Abb. 2: Wiederkehrende Muster (oben) und wachsende Muster (unten)

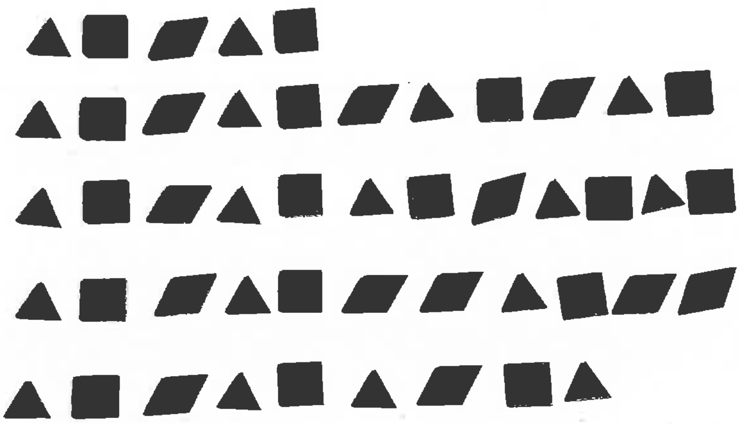


Abb. 3: Verschiedene Fortsetzungen einer vorgegebenen Konfiguration

Kindergarten

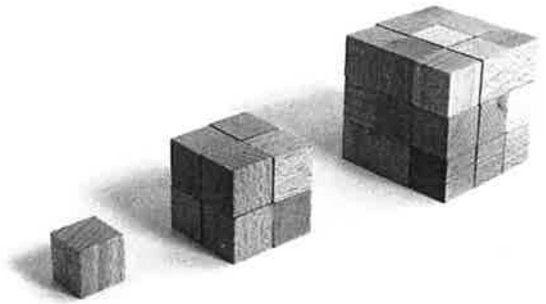
Holzwürfel sind eine Bereicherung für jede Bauecke. Die Kinder können von Beginn an in freier oder angeleiteter Form damit arbeiten. Dabei lassen sich wertvolle Beobachtungen machen:

> *Beobachtungen zum Bauen*
> - Baut das Kind abstrakt oder gegenständlich?
> - Baut das Kind so, dass Muster oder Strukturen erkennbar sind (z. B. symmetrische Objekte)?
> - Hält das Kind begonnene Muster oder Strukturen konsequent durch oder weicht es davon ab?

1 WISSENSWERT

Unterschiedliche Sicht auf Würfelbauten

Auch wenn in Kindergarten, Grundschule und Sekundarstufe I dieselben Würfelbauwerke auftreten, ist doch ihre Bedeutung und die Sichtweise auf diese Bauwerke jeweils eine andere.



Im Kindergarten

Die Bauwerke als solche stehen im Mittelpunkt: Die Kinder beschreiben die Eigenschaften einzelner Bauwerke (z. B. beim Würfel: „In jeder Richtung sind gleich viele Steine."). Sie erkennen das wachsende Muster (oft im Nachbauen), beschreiben es und bauen die Fortsetzung des Musters. Auch Veränderungen des Musters treten auf – häufig in Gestalt von variierten Bauwerken.

In der Grundschule

Jetzt kommt die Verbindung zur Arithmetik hinzu: „Wie viele Würfel benötigt man für das fünfte und sechste Bauwerk?" lautet eine typische weiterführende Frage. Würfelbauwerke regen Berechnungen und das Aufstellen von Zahlentermen an – es werden Analogien zwischen geometrischen und arithmetischen Muster und ihren jeweiligen Eigenschaften hergestellt.

In der Sekundarstufe I

Nun wird die Zahl der Würfel für das n-te Bauwerk durch den Term n^3 bestimmt. Verschiedene wachsende Muster von Würfelbauten bilden prototypische Sachkontexte für verschiedene Terme und verschiedene Funktionen. Geometrische Muster finden ihre Entsprechung in funktionalen Zusammenhängen. Das Bauwerk als solches tritt in den Hintergrund, während die algebraische Beschreibung wesentlich ist.

- Setzt das Kind verschiedene Bauwerke (z. B. unterschiedlich hohe Türme) zueinander in Beziehung?
- In welcher Weise kann das Kind sein Bauwerk und die dahinter erkennbaren Strukturen verbalisieren?
- In welcher Weise gelingt es dem Kind, sein Bauwerk zu dokumentieren (z. B. durch eine Zeichnung)?

Beim Bauen ergeben sich immer wieder Querverbindungen zur Zahlbegriffsentwicklung: Wenn Kinder versuchen, Muster zu legen, spielt häufig auch die Anzahl der Würfel (in jeder Reihe, in jedem zusätzlichen Bauwerk, ...) eine wichtige Rolle.

Beobachtungen zur Zahlbegriffsentwicklung
- In welcher Weise erfasst das Kind die Anzahl der Würfel (auf einen Blick, durch vollständiges Auszählen, Weiterzählen, Zählen mit oder ohne Antippen, Zählen in Schritten, Zählen von Bündeln, ...)?
- Greift das Kind gezielt nach einer bestimmten Anzahl von Würfeln oder geht es eher experimentierend vor?

Wenn Kinder in freier Weise bauen, findet der Austausch eher ungeplant als „Ideenwanderung" (Lee 2010, S. 23) statt. Ansonsten können auch Phasen gemeinsamen Arbeitens und Phasen individualisierter Arbeit einander abwechseln **(Abb. 4)**:
- In *Phasen individualisierten Arbeitens* erhalten die Kinder ausreichend Gelegenheiten und Zeit, um sich eigenständig und selbstgesteuert mit dem Material auseinanderzusetzen, auf der Basis ihrer jeweiligen Vorkenntnisse und Lernvoraussetzungen.
- In *Phasen gemeinsamen Arbeitens* steht der soziale Austausch im Vordergrund. Die Kinder können ihre Erfahrungen berichten und weitergeben sowie neue Impulse für das weitere Arbeiten erhalten.

Dieses Wechselspiel des Lernens auf eigenen Wegen sowie des Lernens voneinander und miteinander ist ein Grundprinzip des Mathematiklernens in heterogenen Gruppen, nicht nur im Kindergarten (vgl. Rathgeb-Schnierer 2010).

Grundschule

Folgen von Würfelbauwerken sind typische Beispiele für wachsende Muster **(Abb. 5)**. Zunächst spielt auch hier das Bauen eine wichtige Rolle: Das Fortsetzen des Musters durch Weiterbauen ist ein Hinweis dafür, ob die Schülerinnen und Schüler ein dahinter stehendes Konstruktionsprinzip erkannt haben. Darüber hinaus werden aber vielfältige Verbindungen zur Arithmetik hergestellt: Würfelbauten sind figurierte Zahlen (vgl. Steinweg 2006).

Die Fortsetzung der Folge der natürlichen Zahlen als Würfelbauwerk **(Abb. 5 oben)** ist nicht nur eine relativ schwierige Aufgabe, weil sich zwei Konstruktionsprinzipien abwechseln. Sie macht auch greifbar, dass es zwei „Sorten" von Zahlen gibt: solche, bei denen beide Säulen gleich hoch sind, und solche, bei denen sie unterschiedlich hoch sind – dies vermittelt Vorerfahrungen zu geraden und ungeraden Zahlen.

Während die quadratischen Anordnungen **(Abb. 5 unten)** zu den Quadratzahlen führen und damit

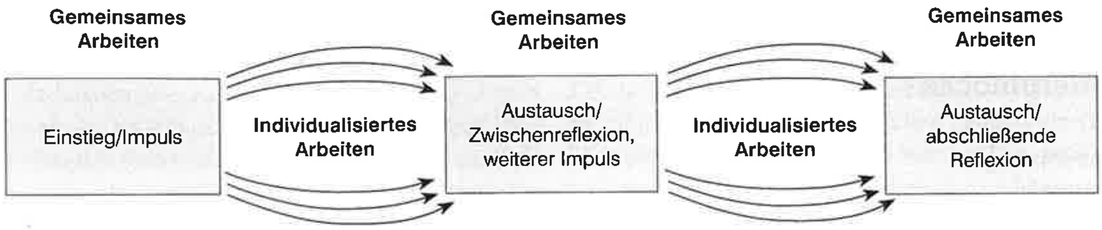


Abb. 4: Mögliche Abfolge von Phasen gemeinsamen und individualisierten Arbeitens

Stützpunktaufgaben für das kleine Einmaleins liefern, sind die Dreieckszahlen **(Abb. 5 Mitte)** als solche ohne jede Bedeutung. Das Ziel ist ein anderes: Die Kinder lernen, gegebene Darstellungen zu strukturieren – Strukturen in sie hineinzusehen – und diese Strukturen fortzusetzen.

Mögliche Analysefragen für die Beobachtung:
- Wie geht das Kind bei der Anzahlbestimmung vor?
- Geht es systematisch oder unsystematisch vor?
- Werden die Würfel einzeln oder in Gruppierungen gezählt (z. B. in Stangen oder Ebenen)?
- Nimmt das Kind gedankliche Umstrukturierungen vor (z. B. paarweises Zusammenfügen zweier Säulen)?
- Werden nicht sichtbare Würfel berücksichtigt?

Besondere Bedeutung gewinnen bei den Würfelbauten auch die Übergänge von einem Element der Folge zum nächsten: In manchen Folgen kommt stets dasselbe hinzu, in anderen verändert sich der Zuwachs nach einer bestimmten Regel. So wird z. B. der Zuwachs in der Folge der Quadratzahlen durch die ungeraden Zahlen beschrieben.

Die Summe zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen ist stets eine Quadratzahl – auch dies ist eine mögliche Erkenntnis. Leistungsstarke Kinder können erste Summenformeln (als Zahlenterme oder verbal formulierte Berechnungsvorschriften) finden. Bei allen diesen Entdeckungs- und Begründungsprozessen können die Kinder stets in zwei verschiedenen Darstellungsmodi argumentieren: geometrisch durch das Umlegen von Würfelbauten sowie arithmetisch aufgrund von Zahlbeziehungen.

Sekundarstufe I

Anknüpfend an die bis dahin gesammelten reichhaltigen Erfahrungen mit Würfelbauwerken im Sinne von figurierten Zahlen kann in der Sekundarstufe I funktionales und algebraisches Denken angebahnt werden (vgl. Siebel/Wittmann 2012). Im Unterricht sollte zunehmend ein Perspektivwechsel eingeleitet werden, weg von den konkreten (An-)Zahlen, hin zu den dahinter stehenden allgemeinen Gesetzmäßigkeiten, die für alle Bauwerke einer Folge gelten: Es werden nicht mehr die Eigenschaften des fünften oder sechsten, sondern die des n-ten Bauwerks beschrieben.

Einen Impuls hierzu liefert das Arbeiten mit Anzahlen, die so groß sind, dass ein Bauen oder vollständiges Zeichnen ausscheidet: „Wie viele Würfel umfasst das 20. (das 100.) Bauwerk?" Und: „Wie viele Würfel kommen im Vergleich zum 19. (zum 99.) Bauwerk neu hinzu?" Obwohl die Schülerinnen und Schüler weder Buchstabenvariable noch das Wort „Funktion" verwenden, zeigen sie doch funktionales Denken: Sie beschreiben, welche Anzahl von Würfeln jedem n (der Nummer des Bauwerks) zugeordnet wird und wie sich die Anzahl der Würfel verändert, wenn n um 1 wächst.

Diese Beschreibungen spiegeln den Zuordnungs- und den Kovariationsaspekt wider, zwei für das Arbeiten mit Funktionen charakteristische Denkweisen (vgl. Malle 2000). Gleichzeitig wird hierbei algebraisches Denken gefordert: Es müssen (zunächst geometrische, später arithmetische) Muster erkannt, beschrieben und aufeinander bezogen werden. Durch einen Perspektivwechsel gelingt es, die Muster neu zu deuten und so zu einer allgemeinen Beschreibung der Struktur einer Folge von Zahlenketten zu gelangen. Diese Struktur beschreiben Schülerinnen und Schüler häufig mit allgemeinen Zahlen: Sie verwenden konkrete Zahlen (im Beispiel oben 20 oder 99) wie allgemeine Zahlen, bevor die Abstraktion auch sprachlich durch Wortvariable wie „die Anzahl der Steine in der untersten Reihe" oder Buchstabenvariable wie n zum Ausdruck gelangt (vgl. Fischer u. a. 2010). Am Ende kann dann die Beschreibung der

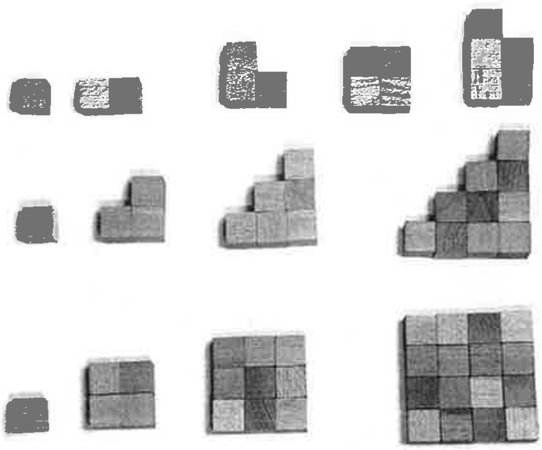
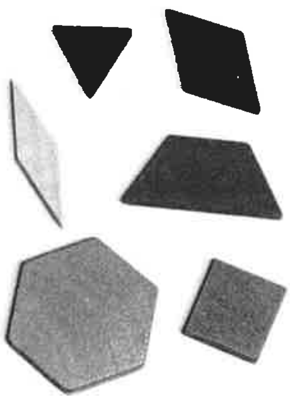


Abb. 5: Natürliche Zahlen, Quadratzahlen und Dreieckszahlen

❷ WISSENSWERT

Was sind Patternblocks?

Patternblocks (pattern: engl. Muster, block: engl. Klotz) wurden in den 1960er-Jahren entwickelt. Sie bestehen aus einem Satz farbiger geometrischer Formen:



- gleichseitiges Dreieck (grün)
- gleichschenkliges Trapez (rot)
- kleine Raute (beige)
- große Raute (blau)
- Quadrat (orange)
- reguläres Sechseck (gelb)

Das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, das reguläre Sechseck und die beiden Rauten besitzen jeweils dieselbe Seitenlänge. Dieses Maß nehmen auch die beiden Schenkel sowie die kurze Grundlinie des Trapezes auf, während die lange Grundlinie des Trapezes doppelt so lang ist.
Die Innenwinkel messen bei der kleinen Raute 30° und 150° sowie bei der großen Raute und beim gleichschenkligen Trapez 60° und 120°.
Die große Raute ist zerlegbar in zwei Dreiecke und das Trapez in drei Dreiecke. Das Sechseck ist zerlegbar in drei große Rauten oder in zwei Trapeze und damit in sechs gleichseitige Dreiecke.

Anzahl der Würfel des n-ten Bauwerks durch Terme wie $1 + 2 + \ldots + n$ oder n^2 stehen. Auch hier gilt, dass sich algebraische Argumentationen – etwa der Zuwachs an Würfeln vom n-ten zum $(n + 1)$-ten Bauwerk – geometrisch nachvollziehen lassen (vgl. Barzel u. a. 2006, Wieland 2006).

Patternblocks

Bei den Patternblocks handelt es sich um sechs verschiedene Holzplättchen, wobei jede der geometrischen Grundformen in einer bestimmten Farbe gehalten ist **(Kasten 2)**. Durch die vielfältigen Beziehungen der Formen untereinander regen sie zum Legen geometrischer Muster an – sowohl in einer Dimension (Bandornamente) als auch in zwei Dimensionen (Parkettierungen, rotationssymmetrische Muster, ...).

Kindergarten

In einem ersten Zugang beschäftigen sich die Kinder ohne Anleitung mit dem Material. Sie können dabei allein oder in Gruppen arbeiten.

Mögliche Beobachtungen:
- Legt das Kind abstrakt oder gegenständlich?
- Legt das Kind exakt und legt es lückenlos („passen" die gelegten Teile zueinander)?
- Legt das Kind ein Muster?
- Besitzt das Muster eine Symmetrie?
- Hält das Kind begonnene Muster konsequent durch oder weicht es davon ab?
- In welcher Weise kann das Kind sein Muster und die dahinter stehende Regel verbalisieren?

Die gelegten Objekte können als Ausgangspunkt für weitere Aktivitäten dienen, wobei gezielte Impulse hilfreich sind. So können Kinder einerseits ihre eigenen Muster erläutern und die dahinter stehenden Prinzipien schildern, sie können aber auch die Muster anderer Kinder beschreiben. Wenn die Erzieherin oder der Erzieher geeignete Mustervorlagen (z. B. in Form laminierter Bildkarten) zur Verfügung stellen, können die Kinder diese Muster nachlegen und fortsetzen, sie können sie aber darüber hinaus auch abwandeln und eigene Muster entwerfen – wozu ihnen die Vorlagen zahlreiche Anregungen liefern.

Insgesamt steht im Kindergarten das (häufig noch zufällige, unsystematische und nicht immer zielgerichtete) Sammeln erster Erfahrungen im Vordergrund. Weder die Vollständigkeit noch eine Systematisierung werden angestrebt. So müssen die Kinder beim Material keine Bezeichnungen der geometrischen Figuren lernen; es genügt, wenn sie diese aufgrund ihrer Farbe benennen.

Grundschule

Die Aktivitäten aus dem Kindergarten finden in der Grundschule ihre Fortsetzung. Zunächst werden die gestellten Aufgaben „schwerer". Ein typischer Arbeitsauftrag ist das Ergänzen von Mustern, in denen bestimmte Teile abgedeckt sind. Darüber hinaus verschieben sich im Laufe der Zeit die Zielsetzungen und es tun sich neue Schwerpunkte auf.

Im Kontext des Parkettierens etwa werden die Figuren benannt und erste Eigenschaften (wie Anzahl der Ecken, Anzahl und Länge der Seiten oder Parallelität von Seiten) festgehalten. Die Kinder entwickeln dabei visuelle Vorstellungsbilder dieser Figuren, als wichtige (Vor-)Erfahrungen zu den geometrischen Grundformen, die später in der Sek. I begrifflich vertieft werden (vgl. Roth/Wittmann 2009). Mit der sogenannten „Knabbertechnik" können auf kreative Weise neue Figuren entwickelt werden, die sich ebenfalls für eine Parkettierung eignen. Das Herausarbeiten, welche Figurenkombinationen jeweils deckungsgleich zu anderen Figuren sind, vermittelt Vorerfahrungen zum Begriff zerlegungsgleich.

Während im Kindergarten häufig in Einzel- oder Parallelarbeit vorgegangen wird, gewinnt in der

Grundschule das Arbeiten in der Gruppe an Bedeutung: Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht nur lernen, Muster zu beschreiben und fortzusetzen, sondern auch, sich über Muster und ihre (Weiter-)Entwicklung zu verständigen. So können mehrere Kinder gemeinsam ein Muster ohne Lücken legen: Eines beginnt mit einem Patternblock, das nächste legt wieder einen … Sowohl die Gestaltung des Musters als auch die „Spielregeln" – etwa: Wer darf wann wie viele Patternblocks legen? – müssen im Laufe der Partner- oder Gruppenarbeit ausgehandelt werden.

Sekundarstufe I

Während im Kindergarten und in der Grundschule die Beschreibung sowie das Nachlegen und Fortsetzen der Muster dominiert und die Muster häufig als interessante Phänomene wahrgenommen werden, richtet sich der Fokus nun verstärkt auf eine tiefer gehende Analyse der entstandenen Muster und ihrer zugrunde liegenden Strukturen.

Typische Untersuchungsfragen:
- **Warum eignen sich gerade die sechs vorgegebenen Figuren so gut für Parkettierungen (oder speziell für rotationssymmetrische Muster)?**
- **Mit welchen Eigenschaften der betreffenden Figuren hängt dies zusammen?**
- **Mit welchen weiteren Figuren kann die Ebene parkettiert werden?**

Auf der Basis dieser Überlegungen lassen sich beispielsweise Bandornamente nach ihren Symmetrieeigenschaften klassifizieren (vgl. Wittmann 1987, S. 224 ff.) und die Schülerinnen und Schüler können gezielt Bandornamente mit diesen Symmetrieeigenschaften legen.

Aber auch die Patternblocks selbst sind Untersuchungsobjekte, sodass die Figuren nun endgültig nicht mehr als „einprägsames Ganzes" wahrgenommen, sondern aufgrund ihrer Eigenschaften (jetzt auch Winkel-, Diagonalen- und Symmetrieeigenschaften) genauer mathematisch beschrieben und charakterisiert werden können (vgl. Roth/Wittmann 2009). Anknüpfend an die Winkelsumme im n-Eck ist eine Bestimmung der Innenwinkel aller sechs Figuren möglich. Die Länge der Diagonalen und die Höhe der Figuren kann mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden. Aufgrund der vielfältigen Beziehungen der sechs Figuren untereinander ergeben sich unterschiedliche Lösungswege und Möglichkeiten arbeitsteiligen Vorgehens. Sogar für den Einstieg in die ebene Koordinatengeometrie sind die Patternblocks ein interessantes Untersuchungsobjekt: geometrische Strukturen werden (vektor-)algebraisch beschrieben und lassen sich auch auf dieser Ebene als Strukturen wiederfinden.

Ausblick

Die beiden vorgestellten Materialien können noch in zahlreichen weiteren Bereichen genutzt werden. Hier nur zwei Beispiele: Bauwerke aus Holzwürfeln liefern klassische Lernumgebungen zur Förderung der Raumvorstellung (vgl. Wollring 2006), und die Patternblocks können auch für vertiefende Übungen zu Brüchen als Anteilen genutzt werden (vgl. Hilgers 2010). Eine solche mehrfache Verwendung von Materialien ist nicht nur aus finanziellen Gründen sinnvoll. Materialien aus Holz sind teuer; ihre Anschaffung lohnt sich nur, wenn sie dann auch intensiv genutzt werden – über alle Jahrgangsstufen hinweg. Auch inhaltlich spricht vieles dafür, Materialien nicht nur „mal eben so" in einzelnen Stunden einzusetzen: Erst dann, wenn sie wiederholt eingesetzt werden, können die Schülerinnen und Schüler an vorhergehende Erfahrungen anknüpfen und diese immer wieder vertiefen.

Anmerkung
Patternblocks aus Holz oder Kunststoff können Sie z. B. unter http://www.bb-versand.de/ bestellen, dort "Patternblocks" in die Suchmaske eingeben.

Literatur
Barzel, B./Monreal, D./Lassek, K. (2006): Lernwerkstatt Terme. Schülerarbeitsheft Mathe-Welt. – In: mathematik lehren Heft 136, Friedrich Verlag, Seelze S. 22–38.
Devlin, K. (1988): Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. – Spektrum, Heidelberg, Berlin.
Fischer, A./Hefendehl-Hebeker, L./Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. – In: Praxis der Mathematik in der Schule 52(33), S. 1–7.
Hilgers, A. (2010): Fun Fractions. Ideenkiste – In: mathematik lehren 158, S. 68–69.
Lee, K. (2010): Kinder erfinden Mathematik. Gestaltendes Tätigsein mit gleichem Material in großer Menge. – verlag das netz, Berlin.
Lüken, M. (2012): Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern. – Waxmann, Münster.
Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. – In: mathematik lehren 103, S. 8–11.
Roth, J./Wittmann, G. (2009): Figuren und Körper. – In: Weigand, H.-G. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. – Spektrum, Heidelberg, S. 123–156.
Rathgeb-Schnierer, E. (2010): Lernen auf eigenen Wegen. Eine Herausforderung für den Mathematikunterricht. – In: Grundschulunterricht Mathematik 57(1), S. 4–7.
Royar, T./Streit, C.: (2009): MATHElino. Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen. – Kallmeyer, Seelze.
Siebel, F./Wittmann, G. (2012): Mehr als Rechnen. Über den Zahlenblick zu funktionalem und algebraischem Denken. – In: mathematik lehren 171, S. 2–8.
Steinweg, A. S. (2006): … sich ein Beispiel machen. Terme und figurierte Zahlen. – In: mathematik lehren 136, S. 14–17.
Wieland, G. (2006): Terme bauen. Impulse für mehr Anschaulichkeit in der elementaren Algebra. – In: mathematik lehren 136, S. 22 und 39–43.
Wittmann, E. C. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. – Vieweg, Braunschweig.
Wollring, B. (2006): Erwerben, Korrespondieren, Festhalten. Raumerfahrungen im Mathematikunterricht der Grundschule – In: Grundschulmagazin 74(5), S. 8–12.